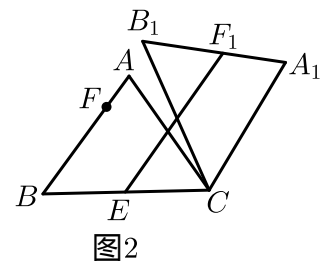
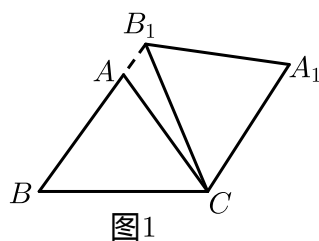


第3讲几何变换之旋转（练习）

1. 在 $\triangle ABC$ 中， $AB = AC = 5$ ， $BC = 6$ ．将 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转，得到 $\triangle A_1B_1C$ ．如图2，点 E 是 BC 上的中点，点 F 为线段 AB 上的动点．在 $\triangle ABC$ 绕点 C 顺时针旋转过程中，点 F 的对应点是 F_1 ，求线段 EF_1 长度的最大值与最小值的差．



2. 在平面直角坐标系中，已知点 $A(2,0)$ ，点 $B(0,2\sqrt{3})$ ，点 $O(0,0)$ ， $\triangle AOB$ 绕着点 O 顺时针旋转，得 $\triangle A'OB'$ ，点 A, B 旋转后的对应点为 A', B' ，记旋转角为 α 。

(1) 如图1，若 $\alpha = 30^\circ$ ，求点 B' 的坐标。

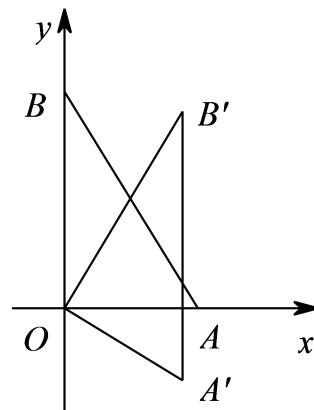


图1

(2) 如图2，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，设直线 AA' 和直线 BB' 交于点 P ，求证： $AA' \perp BB'$ 。

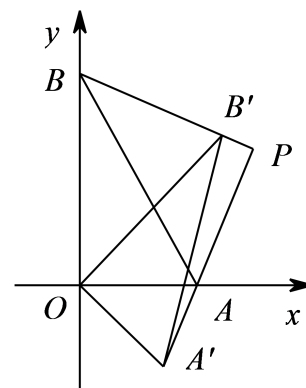
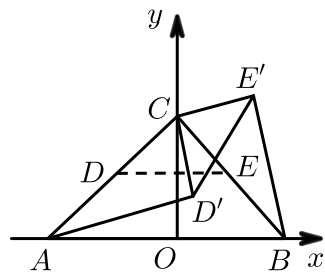


图2

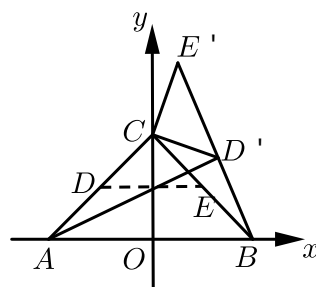
(3) 若 $0^\circ < \alpha < 360^\circ$ ，求(2)中的点 P 纵坐标的最小值（直接写出结果即可）。

3. 在平面直角坐标系中，点 $A(-2,0)$ ， $B(2,0)$ ， $C(0,2)$ ，点 D ，点 E 分别是 AC ， BC 的中点，将 $\triangle CDE$ 绕点 C 逆时针旋转得到 $\triangle CD'E'$ ，及旋转角为 α ，连接 AD' ， BE' 。

(1) 如图，若 $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ，当 $AD' \parallel CE'$ 时，求 α 的大小。



(2) 如图， $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ，当点 D' 落在线段 BE' 上时，求 $\sin \angle CBE'$ 的值。



(3) 直线 AD' 与直线 BE' 相交于点 P ，求点 P 的横坐标 m 的取值范围（直接写出结果即可）

4. 如图1, 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle A = 90^\circ$, $AB = AC = \sqrt{2} + 1$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $AD = AE = 1$, 连接 DE , 现将 $\triangle ADE$ 绕点 A 顺时针方向旋转, 旋转角为 α ($0^\circ < \alpha < 360^\circ$), 如图2, 连接 CE, BD, CD .

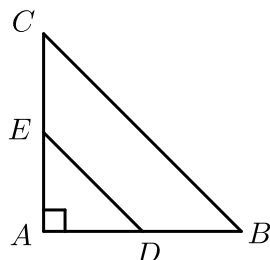


图1

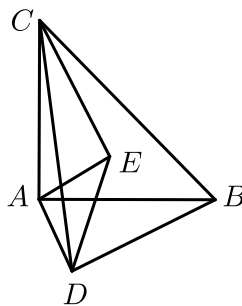


图2

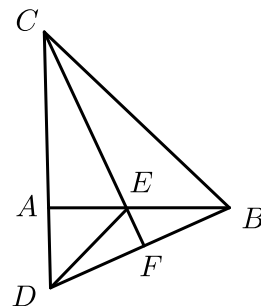


图3

- (1) 当 $0^\circ < \alpha < 180^\circ$ 时, 求证: $CE = BD$.
- (2) 如图3, 当 $\alpha = 90^\circ$ 时, 延长 CE 交 BD 于点 F , 求证: CF 垂直平分 BD .
- (3) 在旋转过程中, 求 $\triangle BCD$ 的面积的最大值, 并写出此时旋转角 α 的度数.

5. 如图1, $\triangle ABC$ 是等腰直角三角形, $AB = BC$, $\angle ABC = 90^\circ$, 线段 BD 可绕点 B 在平面内旋转, $BD = 4$

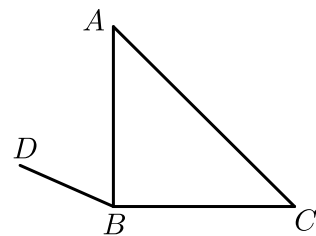


图1

- (1) 若 $AB = 8$, 在线段 BD 旋转过程中, 当点 B, C, D 三点在同一直线上时, 直接写出 CD 的长 _____ .

- (2) 如图2, 若将线段 BD 绕点 B 按顺时针方向旋转 90° , 得到线段 BE , 连接 AE, CE .

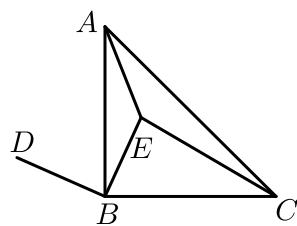


图2

- ① 当点 D 的位置由 $\triangle ABC$ 外的点 D 转到其内的点 E 处, 且 $\angle AEB = 135^\circ$, $AE = 2\sqrt{5}$ 时, 求 CE 的长.
- ② 如图3, 若 $AB = 8$, 连接 DE , 将 $\triangle BDE$ 绕点 B 在平面内旋转, 分别取 DE, AE, AC 的中点 M, P, N , 连接 MP, PN, NM , 请直接写出 $\triangle MPN$ 面积 S 的取值范围 _____ .

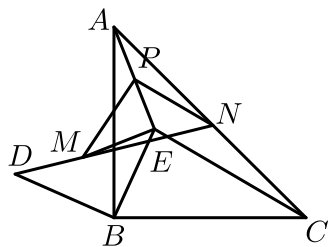


图3

6. 【问题提出】

- (1) 如图(1), P 是正方形 $ABCD$ 内一点, 将 $\triangle ABP$ 绕点 B 顺时针方向旋转与 $\triangle CBQ$ 重合, 若 $PB = 2$, 则 $PQ = \underline{\hspace{2cm}}$. (直接写出答案)

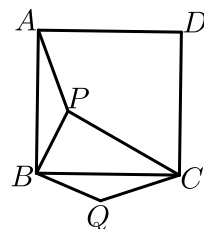


图 1

- (2) 【问题探究】如图(2), P 是等边 $\triangle ABC$ 内一点, 连接 PA 、 PB 、 PC , 若 $PA = 4$, $PB = 2$, $PC = 2\sqrt{5}$, 求 $\angle APB$ 的度数.

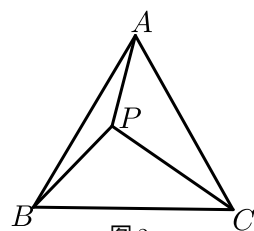
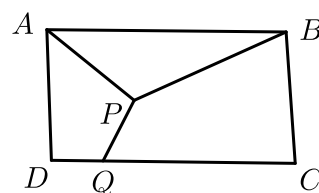


图 2

- (3) 【问题解决】如图(3), 长方形 $ABCD$ 是一个花园, 其中 $AB = 900$ 米, $AD = 600$ 米, 顶点 A 、 B 为两个入口, 现准备在公园内建立一个标志性景点 P , 在 CD 边上(含 C 、 D 两点)再设立一个入口 Q , 并修建三条通往景点 P 的小路 PA 、 PB 、 PQ , 求这三条小路长度之和的最小值.



图(3)

7. 如图，在平面直角坐标系 xOy 中有矩形 $OABC$ ， $A(4,0)$ ， $C(0,2)$ ，将矩形 $OABC$ 绕原点 O 逆时针旋转得到矩形 $OA'B'C'$ 。

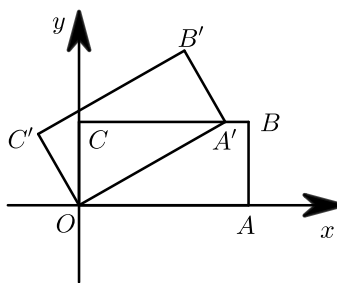


图 1

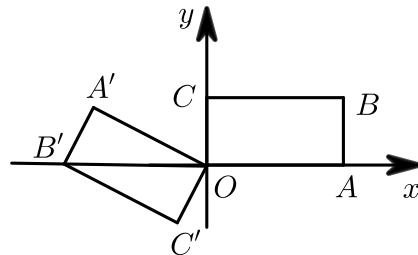
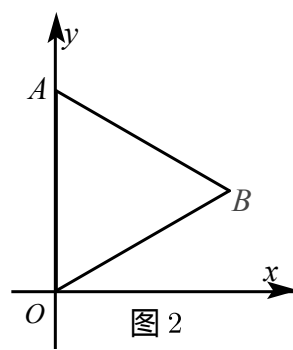
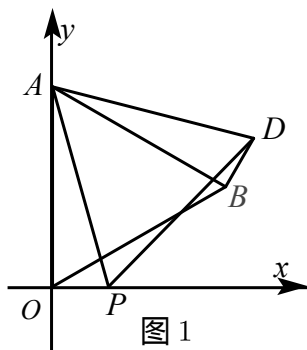


图 2

- (1) 如图1，当点 A' 首次落在 BC 上时，求旋转角；
- (2) 在 (1) 的条件下求点 B' 的坐标；
- (3) 如图2，当点 B' 首次落在 x 轴上时，直接写出此时点 A' 的坐标

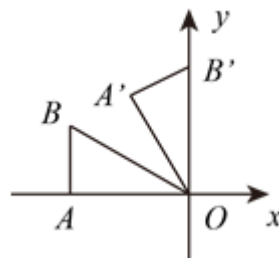
8. 如图1，在平面直角坐标系中，已知 $\triangle AOB$ 是等边三角形，点 A 的坐标是 $(0, 4)$ ，点 B 在第一象限，点 P 是 x 轴上的一个动点，连接 AP ，并把 $\triangle AOP$ 绕着点 A 按逆时针方向旋转，使边 AO 与 AB 重合，得到 $\triangle ABD$ 。



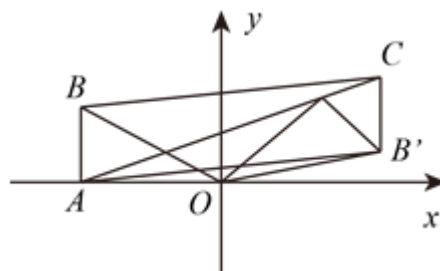
- (1) 求直线 AB 的解析式。
- (2) 当点 P 运动到点 $(\sqrt{3}, 0)$ 时，求此时 DP 的长及点 D 坐标。
- (3) 是否存在点 P ，使 $\triangle OPD$ 的面积等于 $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ，若存在，请求出符合条件的点 P 的坐标；若不存在，请说明理由。

9. 在平面直角坐标系中， O 为坐标原点，点 A 坐标为 $(-2\sqrt{3}, 0)$ ， $\angle OAB = 90^\circ$ ， $\angle AOB = 30^\circ$ ，将 $\triangle OAB$ 绕点 O 按顺时针方向旋转，旋转角为 α ($0^\circ < \alpha \leq 150^\circ$)，在旋转过程中，点 A 、 B 的对应点分别为点 A' 、 B' 。

(1) 如图，当 $\alpha = 60^\circ$ 时，直接写出点 A' _____、 B' _____ 的坐标。

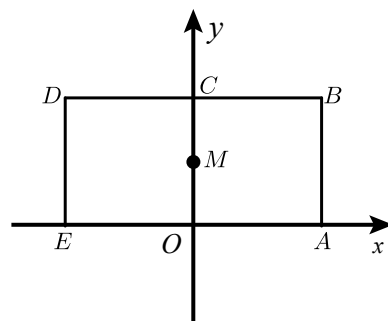


(2) 如图，当 $\alpha = 135^\circ$ 时，过点 B' 作 AB 的平行线交 AA' 延长线于点 C ，连接 BC ， AB' 。

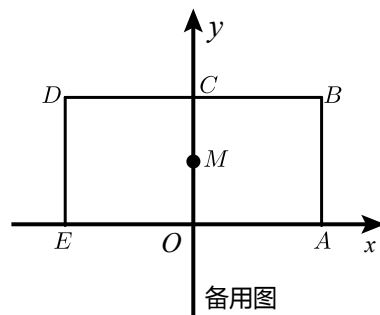


- ① 判断四边形 $AB'CB$ 的形状，并说明理由。
 - ② 求此时点 A' 和点 B' 的坐标。
- (3) 当 α 由 30° 旋转到 150° 时，(2)中的线段 $B'C$ 也随之移动，请求出 $B'C$ 所扫过的区域的面积？（直接写出结果即可）。

10. 如图，在平面直角坐标系中，矩形 $ABDE$ 的边 $AB = 4$ ， $BD = 8$ ，点 $B(4, 4)$ ，点 A ，点 E 都在 x 轴上， BD 与 y 轴交于点 C ，点 M 是矩形 $ABDE$ 的对称中心．

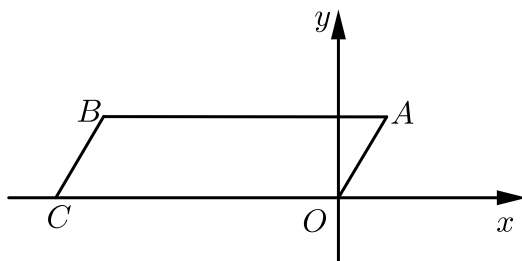


- (1) 写出点 M 的坐标．
- (2) 现将线段 OM 绕点 O 顺时针旋转得到 OM' ，旋转角为 α ，连结 AM' ，以 AM' 为边作正方形 $AM'PQ$ （点 A 、 M' 、 P 、 Q 成顺时针排列）．
- ① 若 $0^\circ < \alpha \leq 90^\circ$ ， $PQ \parallel BD$ 时，求旋转角 α 的度数．
 - ② 若 $0^\circ < \alpha \leq 180^\circ$ ，直线 PQ 与直线 BD 所成的夹角为 30° 时，求旋转角 α 的度数．
 - ③ 若 $0^\circ < \alpha \leq 360^\circ$ ，请直接写出线段 PQ 与线段 BD 存在交点时旋转角 α 的取值范围．（直接写出结果即可）

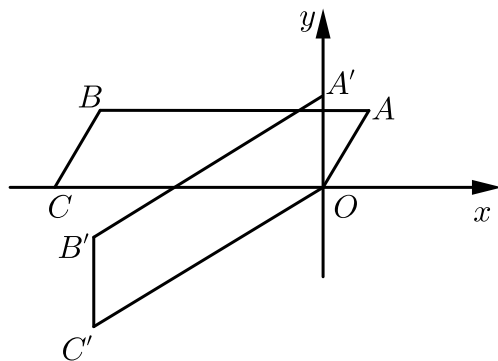


11. 将平行四边形 $OABC$ 放在平面直角坐标系中， O 为原点，点 $C(-6,0)$ ，点 A 在第一象限， $OA = 2$ ， $\angle A = 60^\circ$ 。

(1) 如图①，求点 A 的坐标。



(2) 如图②，将平行四边形 $OABC$ 绕点 O 逆时针旋转得到平行四边形 $OA'B'C'$ ，当点 A 的对应点 A' 落在 y 轴正半轴上时，求旋转角及点 B 的对应点 B' 的坐标。



(3) 将平行四边形 $OABC$ 绕点 A 旋转得到平行四边形 $DAEF$ ，当点 B 的对应点 E 落在直线 OA 上时，求直线 EF 的表达式 (直接写出结果即可) 。

12. 如图 (1), 在 $\triangle ABC$ 中, $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = BC$, 点 D, E 分别在边 AB, AC 上, 且 $DE \perp AD$, 连接 BE , 点 F 为 BE 的中点, 连接 DF, CF .

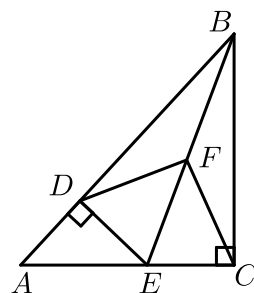


图 (1)

- (1) 观察猜想; 线段 DF 和 CF 的数量关系为 _____; DF 和 CF 的位置关系为 _____.
- (2) 探究证明: 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转到如图 (2) 所示的位置, 试判断 (1) 中的关系是否仍然成立. 如果成立, 请加以证明; 如果不成立, 请说明理由.

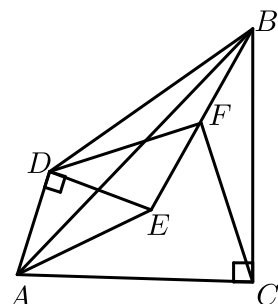


图 (2)

- (3) 拓展应用: 若 $AB = 13$, $AD = 5$, 把 $\triangle ADE$ 绕点 A 逆时针旋转的过程中, 请直接写出当 D, E, B 三点共线时 CF 的长度.